MAI 1 - domácí úkol ze cvičení 5.

(opět spíše jako domácí cvičení, ale vypracujte příklady 2,3,4 a aspoň po dvou úlohách z příkladů 5,6)

1* Ještě o nekonečných řadách (nepovinný pro zájemce):
Rozhodněte, zda platí následující tvrzení (a pak také dokažte, že platí), nebo opravte tak, aby tvrzení platilo:

a) Když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$, kde $a_n \geq 0$ pro $n \in N$, pak konverguje také řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = a_{k_1} + a_{k_2} + \dots$, kde $1 \leq k_1 < k_2 \dots$.

b) Když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$.

c) Když konvergují řady $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ a $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n)^2$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ konverguje .

2. Najděte definiční obory funkcí:

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$; b) $f(x) = \dfrac{1}{x \cdot \sqrt{4 - \ln^2 x}}$ c) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

3. Ukažte, že funkce $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ je rostoucí, tedy prostá na R a najděte k funkci f na R funkci inverzní.

4. Zkuste načrtnout grafy funkcí:

a) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ a $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$; b) $h(x) = \exp(-|x|)$; c) $k(x) = \left|\ln|x|\right|$.

5. Z definice limity ukažte:

a) $\lim\limits_{x \to 3} (2x-1) = 5$ nebo $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$, $a \in R$; b) $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$ nebo $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} \sin x = 0$.

6. Ukažte, že neexistují limity

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ nebo b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} \sin x$ nebo c) $\lim\limits_{x \to 0} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ nebo d) $\lim\limits_{x \to +\infty} x(1 + \sin x)$.